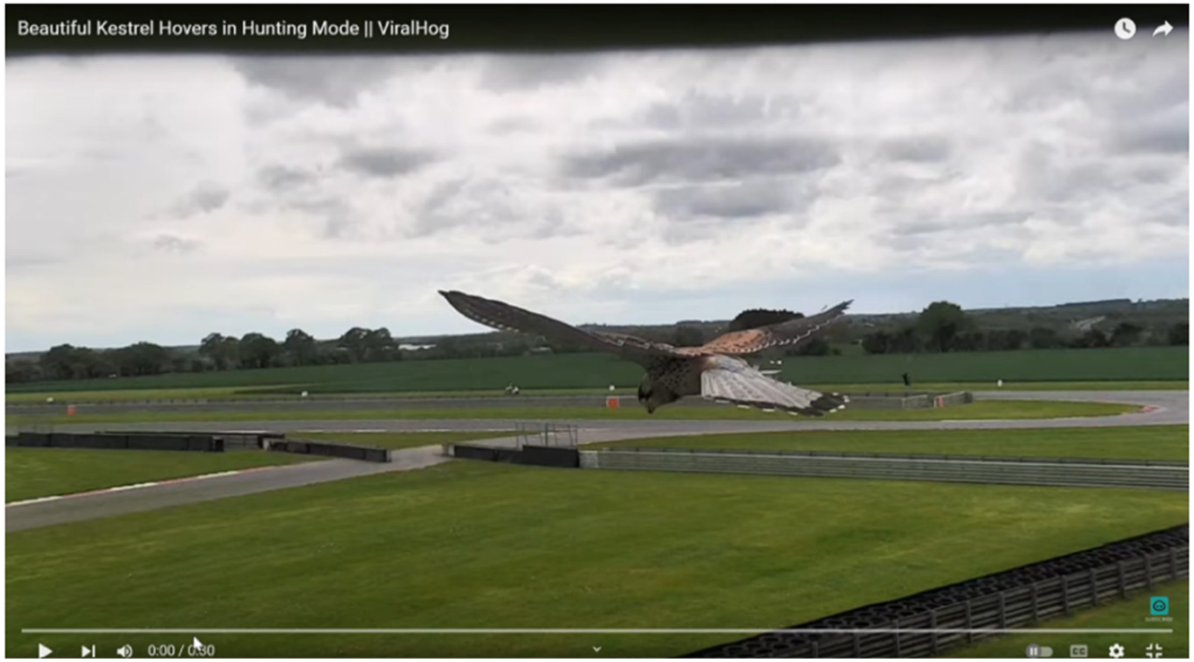
Fortgeschrittene Regelungstechnik (FRT)

Dr. Ossama Hachicho

Vertretung von

Prof. Dr. Cumhur Baspinar

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)
1.1 Einführung



https://www.youtube.com/watch?v=mDRcLAkRZ50

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)
1.1 Einführung

https://www.youtube.com/watch?v=hRZ7yKxS4Zk

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

1.1 Einführung

https://www.youtube.com/watch?v=eXsT2HT171o

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

1.1 Einführung

Annahme:

$\frac{M_E}{M_S} \ll 1$ (Die Masse der Erde ist viel Kleiner als Masse der Sonne)

Gravitationskraft:

$$F_G = G\,\frac{M_S M_E}{R^2}$$

Zentrifugalkraft (Fliehkraft):

$$F_C = M_E R \dot{\theta}^2;\ \omega = \frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta}$$

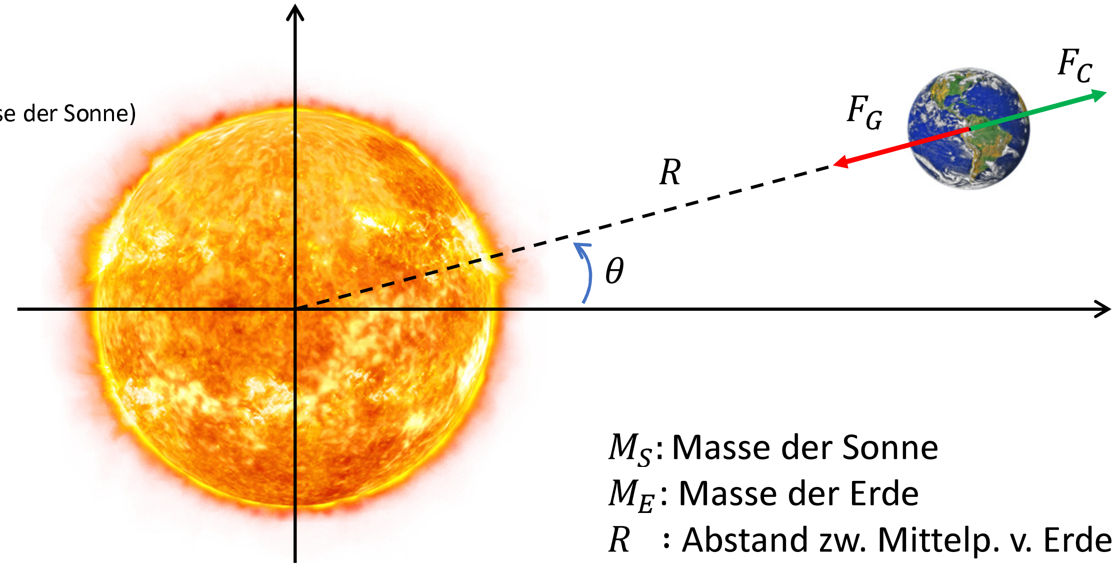
Gleichgewicht der Kräfte:

$$|F_C| = |F_G|$$

$$\cancel{M_E} R \dot{\theta}^2 = G\,\frac{M_S \cancel{M_E}}{R^2}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{G\,\frac{M_S}{R^3}} = const = c = 0 \cdot \theta + c$$

$$\boxed{\dot{\theta} = f(\theta)}$$



M_S: Masse der Sonne
M_E: Masse der Erde
R : Abstand zw. Mittelp. v. Erde und Sonne
θ : Lagewinkel
G : Universelle Gravitationskonstante
F_G : Gravitationskraft
F_C : Zentrifugalkraft

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)
1.1 Einführung

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = g(x,u)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

$$\boxed{\dot{x} = f(x,u)}$$

$$\uparrow$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\dot{\theta} = f(\theta)}$$

x: Zustandsvektor,
u: Eingangsvektor

$$x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$u \in \mathbb{R}^m, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

1.1 Einführung

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

$\rightarrow$

Lineare Form:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

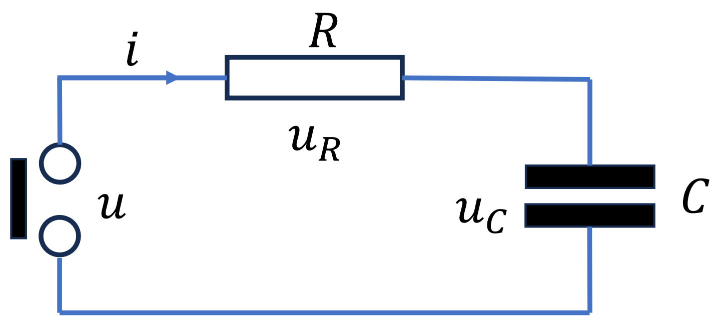
$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$

$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$

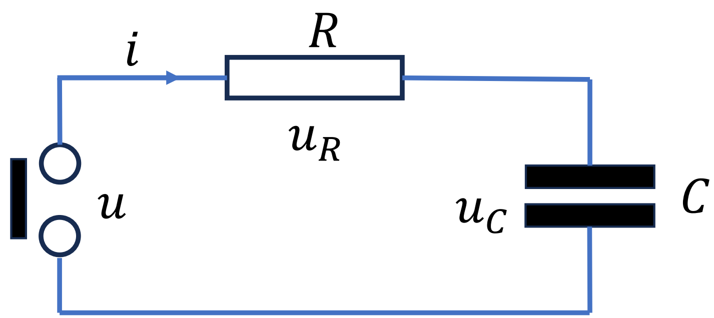


Allgemeine (nicht lineare) Form:

$\dot{x} = f(x,u)$
$\mathrm{y} = g(x,u)$

$x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{Zustandsvector}$
$u \in \mathbb{R}^m, \mathrm{Eingangsvektor}$
$y \in \mathbb{R}^r, \mathrm{Ausgangsvektor}$

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)



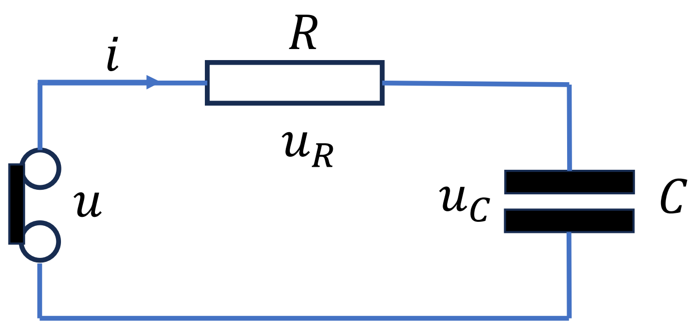
$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$

$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$



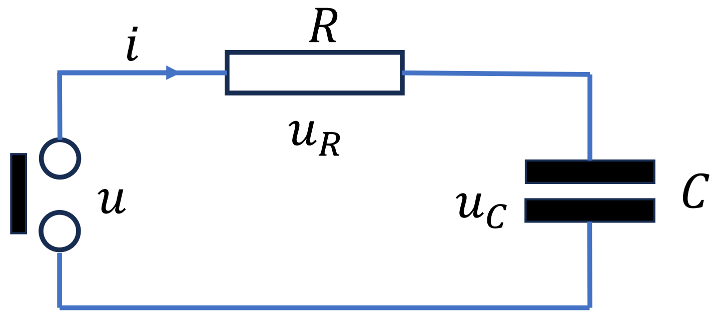
$$u = 0$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x = f(x)}$$ **Autonomes System**

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$



$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$

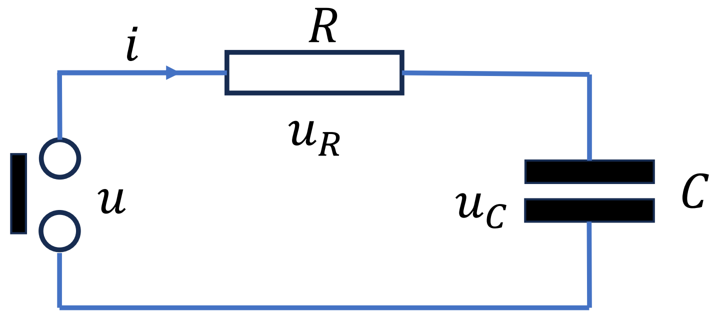
x: Zustandssvektor (**1–dimensional**)
u: Eingangsvektor (**1-dimensional**)

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$\dot{x} = f(x,u)$
$y = g(x,u)$

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)



$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$

$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$

x: Zustandssvektor (**1–dimensional**)
u: Eingangsvektor (**1-dimensional**)

Ausgangsgröße: $y = u_R$

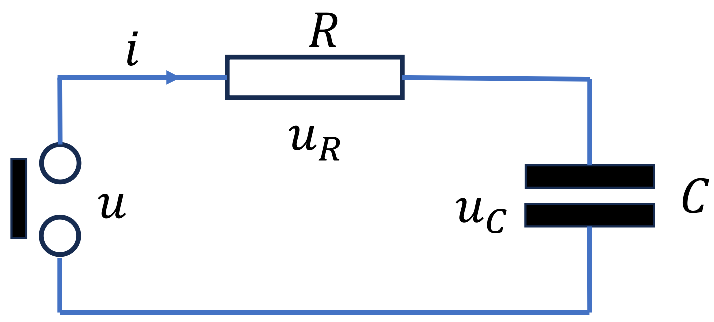
$$y = u_R = -u_C + u = -x + u = g(x,u)$$

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$\dot{x} = f(x,u)$
$y = g(x,u)$ **?**

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)



$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$

$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$

x: Zustandssvektor (**1–dimensional**)
u: Eingangsvektor (**1-dimensional**)

Ausgangsgröße: $y = u_R$

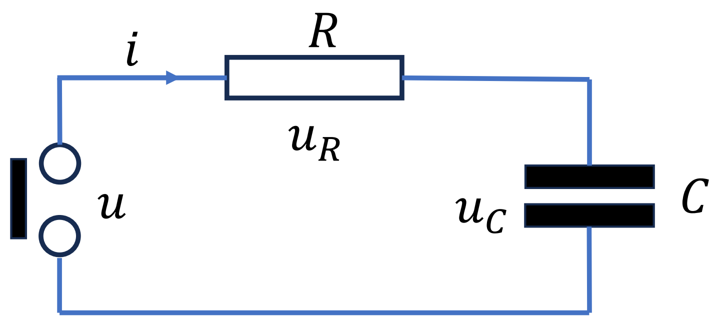
$$\boxed{y = u_R = -u_C + u = -x + u = g(x,u)}$$

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$\dot{x} = f(x,u)$
$y = g(x,u)$ **?**

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)



$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = C\frac{d}{dt}u_C = C\dot{u}_C$$

$$u = u_R + u_C = RC\dot{u}_C + u_C$$

$$u_C = x$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u = f(x,u)}$$

x: Zustandssvektor (**1−dimensional**)
u: Eingangsvektor (**1-dimensional**)

Ausgangsgröße: $y = u_R$

$$\boxed{y = u_R = -u_C + u = -x + u = g(x,u)}$$

Matrixform:

$$\dot{x} = \left[-\frac{1}{RC}\right]_{1\times 1} \cdot x + \left[\frac{1}{RC}\right]_{1\times 1} \cdot u$$

$$y = [-1]_{1\times 1} \cdot x + [1]_{1\times 1} \cdot u$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) = Ax + Bu \\ y &= g(x,u) = Cx + Du \end{aligned}}$$

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Annahme:

Reibung ist sehr gering (=0)

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{s} = u$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{m}u$$

Aufgabe: ZRD aufstellen

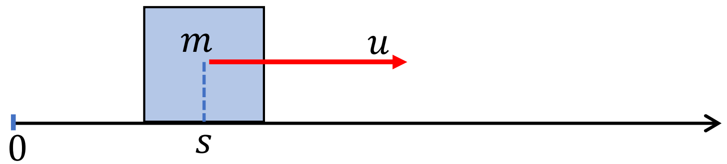
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = s \Longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{s} = x_2 = 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot u$$

$$x_2 = \dot{s} \Longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{s} = \frac{1}{m}u = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$y = s = x_1 = x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot u$$

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \end{aligned}}$$



m: Masse
s : Zustandsgröße (Lage=Entfernung vom Urspr.)
u : Eingangsgröße(Kraft)
y : Ausgangsgröße (= s)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) = Ax + Bu \\ y &= g(x,u) = Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x \in \mathbb{R}^n, \text{Zustandsvector} \\ &u \in \mathbb{R}^m, \text{Eingangsvektor} \\ &y \in \mathbb{R}^r, \text{Ausgangsvektor} \end{aligned}}$$

Zusammenfassung:

Allgemeine (nicht lineare) Form:

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, Zustandsvector
$u \in \mathbb{R}^m$, Eingangsvektor
$y \in \mathbb{R}^r$, Ausgangsvektor

Lineare Form:

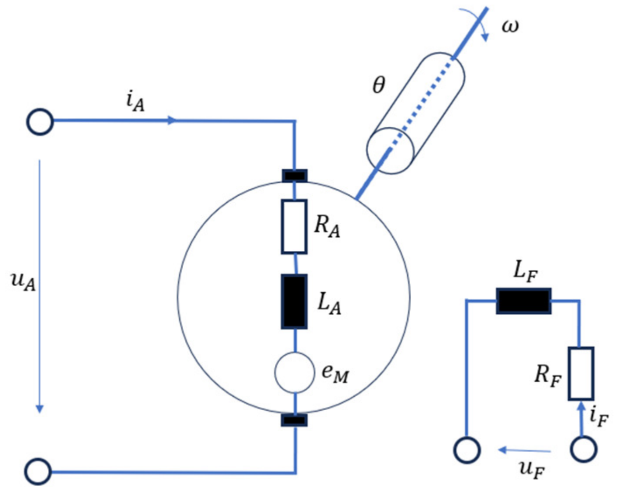
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

A: $n \times n$ − Systemmatrix
B: $n \times m$ − Eingangsmatrix
C: $r \times n$ − Ausgangsmatrix
D: $r \times m$ − Durchgriffsmatrix

Beispiele

Fremderregter Gleichstrommotor

$$\frac{d}{dt}i_F = -\frac{R_F}{L_F}i_F + \frac{1}{L_F}u_F$$
$$\frac{d}{dt}i_A = \frac{u_A}{L_A} - \frac{R_A}{L_A}i_A - \frac{cL_F}{L_A}i_F$$
$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{cL_F}{\theta}i_F i_A - \frac{D}{\theta}\omega$$



Zustandsvariablen
i_F: Strom in der Feldspule
i_A: Strom in der Ankerspule
ω : Drehgeschwindigkeit

Eingangsgrößen
u_A: Spannung an der Ankerspule
u_F: Spannung an der Feldspule

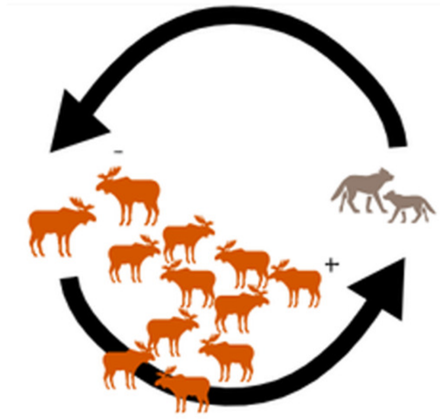
Konstante Parameter
R_F: Widerstand der Feldspule
L_F: Induktivität der Feldspule
R_A: Widerstand der Ankerspule
L_A: Induktivität der Ankerspule
c: Armaturkonstante
D: Viskose Reibung
θ: Trägheitsmoment des Rotors

1. Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Beispiele

Lotka-Volterra-Modell

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$$
$$\dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2)$$



Zustandsvariablen

x_1: Zahl der Angehörigen der Spezies 1

x_2: Zahl der Angehörigen der Spezies 2

Konstante Parameter

$r_r, r_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$